Лекция 4. Жылдам Фурье түрлендіруі

Дискретті Фурье түрлендіруге қажет операциялар санын есептейік. Әр коэффициент үшін N^2 операция қажет. Бірақ, кейбір жағдайларда жылдам түрлендірілерді қолдануға болады

$N=s_1 \cdot s_2$ болсын. Фурье коэффициенттерін есептейік:

$$A_n = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} f_q \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi qn}{N}\right)$$

n коэффициент нөмірін $n=t \cdot s_1+m$ түрде жазайық,

Нүктенің нөмірін $q = \tau \cdot s_2 + p,\ \mathrm{p} = 0,\dots,\mathrm{s}_2 - 1, \mathrm{q} = 0,\dots,\mathrm{s}_1 - 1$ түрде жазайық,

Онда қосынды келесі түрге келеді:

$$\sum_{q=0}^{N-1}\dots \to\ = \sum_{p=0}^{s2-1}\sum_{\tau=0}^{s1-1} f_q \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi(\tau \cdot s_2 + p)}{s_1 s_2}n\right) = \sum_{p=0}^{s2-1}\sum_{\tau=0}^{s1-1} f_q \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi(\tau \cdot n)}{s_1}\right)\exp\left(-i\frac{2\pi(p \cdot n)}{s_1 \cdot s_2}\right)$$

Ықшамдай отыра:

$$= \sum_{p=0}^{s2-1}\exp\left(-i\frac{2\pi(p \cdot n)}{N}\right)\cdot \sum_{\tau=0}^{s1-1} f_q \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi(\tau \cdot n)}{s_1}\right).$$

Сонымен, операциялар саны s1 есе кеміді.

Егер $N=s_1 \cdot s_2 \cdot s_3$, онда әр қарай ықшамдауға болады.

Тәжірибеде $N=2^n$, қолданылады, онда операциялар саны N lnN .

[0,l] кесіндіде анықталған фунцияны Фурье қатарына жіктейік:

$$f(x)=\sum_{n}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}\right)\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}+\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\right)\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}=$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sum_{n=0}^{\infty} f(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}(x-\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} hF(hn)$$

$l\to\infty$ кезде $h=\pi/l$ шаманы тор қадамы деп қабылдасақ, онда бұл қосынды келесі функцияның Риман қосындысы болады:

$F(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\lambda(x-\xi)f(\zeta)d\xi$. Шекке өтсек, онда

$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi$, бұл формула Фурье интеграл формуласы деп аталады, симметриялы түрде:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi$$